APPUNTI INTRODUTTIVI ALLE FUNZIONI COMPLESSE DI UNA VARIABILE COMPLESSA

a cura di M. Bisi, M. Groppi, G. Spiga

Dipartimento di Matematica, Università di Parma

Viale G.P. Usberti 53/A, 43100 Parma - ITALY

1 Prime considerazioni

Ricordiamo che un numero complesso z è identificabile con una coppia di numeri reali (x, y), e può essere scritto nella forma algebrica $z = x + i\,y$ o nella forma trigonometrica $z = \rho\big(\cos\theta + i\,\sin\theta\big)$, dove i è l'unità immaginaria $(0, 1)$. Per i numeri complessi sono definite le normali operazioni di somma e prodotto, con $i^2 = -1$. Le quantità x, y, $\rho = |z|$, $\theta = \arg z$ rappresentano la parte reale, il coefficiente dell'immaginario, il modulo e l'argomento di z

$$x = \mathrm{Re} z \qquad y = \mathrm{Im} z \qquad \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\rho} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho}\,. \tag{1}$$

La rappresentazione in forma trigonometrica permette di scrivere il prodotto di numeri complessi, utilizzando le formule di addizione della trigonometria. Risulta

$$|z \cdot z'| = |z|\,|z'| \qquad\qquad \arg|z \cdot z'| = \arg z + \arg z'\,. \tag{2}$$

Il modulo consente di introdurre una metrica nell'insieme dei numeri complessi (il piano di Gauss $\mathbb{C}$) e di definire i concetti di intorno e di convergenza. In particolare

Definizione 1.1 *Una successione $\{z_n\}$ converge a z_0 in $\mathbb{C}$ quando la successione reale $|z_n - z_0|$ converge a zero per $n \to \infty$. In formula*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0\,. \tag{3}$$

Dall'essere $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$ segue allora

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0\,. \tag{4}$$

Definizione 1.2 *Dato $z \in \mathbb{C}$, si definisce complesso coniugato di z il numero complesso $\bar{z} = x - i\,y$, e risulta $|z|^2 = \bar{z}\,z$.*

Come funzione complessa di una variabile complessa si intende un'applicazione

$$\begin{aligned} f\ :\ \ & A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \longmapsto w = f(z) \end{aligned} \tag{5}$$

ed anche l'immagine w potrà scriversi in forma algebrica, con ad esempio $\mathrm{Re}\,w = u$ e $\mathrm{Im}\,w = v$. Risulterà allora

$$u = u(x, y) \qquad\qquad v = v(x, y) \tag{6}$$

che mostra come lo studio di una funzione complessa di una variabile complessa sia riconducibile allo studio di due funzioni reali u e v di due variabili reali x e y.

Definizione 1.3 *Se A è un aperto e z_0 un suo punto si dirà che $f(z)$ tende al limite $l = a + i\,b$ per $z \to z_0$ quando la funzione reale $|f(z) - l| \to 0$ per $|z - z_0| \to 0$.*

Tenendo conto dell'espressione del modulo di un numero complesso in termini delle sue parti reale e immaginaria, si può scrivere allora

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \;\Leftrightarrow\; \lim_{z\to z_0} |f(z) - l| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \;\text{ e }\; \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b\,. \tag{7}$$

La definizione può essere estesa in modo naturale al caso in cui z_0 sia punto di accumulazione di punti di A.

Il concetto di continuità di una funzione f è l'estensione naturale dell'analogo concetto per le funzioni reali di una variabile reale.

Definizione 1.4 *Si dirà che $f(z)$ è continua in $z_0 \in A$ quando*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\,. \tag{8}$$

Tenendo conto della (7), ciò equivale a dire che tanto u quanto v sono continue nel punto (x_0, y_0). Qualora una o entrambe delle funzioni u e v divergesse positivamente o negativamente per $(x,y) \to (x_0,y_0)$, si dirà che $f(z)$ diverge per $z \to z_0$, senza alcuna altra specifica. Si può dar senso anche alla scrittura

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = l \tag{9}$$

intendendo che $|f(z) - l|$ può essere reso piccolo quanto si vuole pur di prendere $|z|$ opportunamente grande. Vale la pena osservare che in $\mathbb{C}$ ci sono infiniti modi (direzioni) in cui z può tendere a z_0 (o all'infinito), ma il risultato deve essere lo stesso per qualunque di essi per poter parlare di limite. In $\mathbb{R}$ esistevano invece due sole direzioni e si poteva parlare di limite destro o sinistro, e di $+\infty$ o $-\infty$.

2 Funzioni elementari

Esempi immediati di funzioni complesse di variabile complessa nascono dalle operazioni che sono definite in $\mathbb{C}$; ad esempio, partendo da $f(z) = c$ (costante), e da $f(z) = z$ (identità), si può costruire $f(z) = a\,z + b$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$. Altro esempio elementare è dato da $f(z) = z^2$, con $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$, e quindi per moltiplicazioni successive tutte le potenze intere positive z^n per le quali $A = \mathbb{C}$. Prendendone i reciproci, si hanno anche le potenze intere negative di z, ed in particolare

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + i\,y} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}\,. \tag{10}$$

Queste ultime non sono definite in tutto $\mathbb{C}$, in quanto all'insieme A non può appartenere il punto $z = 0$. Si può poi procedere a definire i polinomi di un generico grado n

$$P_n(z) = a_0 + a_1\, z + \ldots + a_n\, z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k \qquad\qquad a_k \in \mathbb{C} \tag{11}$$

e le funzioni razionali, come rapporto di due polinomi, avendo cura di escludere in A gli zeri del denominatore.

Si può dar senso anche in $\mathbb{C}$ alle serie di potenze, del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$. Il concetto di convergenza è basato sulla norma del modulo precedentemente definita, ed è quindi ancora ricondotto allo studio di limiti reali. Analogamente possono estendersi direttamente ai complessi i concetti di convergenza assoluta e di riordino, ed i relativi teoremi. Ad esempio, ricordando che $|z^k| = |z|^k$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ risulta allora convergente, qualunque sia $z \in \mathbb{C}$, in quanto assolutamente convergente. Tale serie è la naturale estensione a $\mathbb{C}$ della serie esponenziale in $\mathbb{R}$.

Viene infatti definito come *esponenziale di un numero complesso* z la somma di tale serie (che ha quindi raggio di convergenza infinito), ponendo

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \tag{12}$$

e tale funzione coincide con l'esponenziale reale quando z viene ristretto a $x \in \mathbb{R}$.

Si può dimostrare che l'esponenziale così definito soddisfa ancora la proprietà caratteristica

$$\mathrm{e}^{z_1 + z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\, \mathrm{e}^{z_2} \qquad\qquad \forall z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}\,. \tag{13}$$

Infatti, con una sequenza di passaggi che può essere giustificata sulla base delle proprietà di convergenza delle serie, e che qui riportiamo solo formalmente, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k\, z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\, \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\, \frac{z_2^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!} = \mathrm{e}^{z_1}\, \mathrm{e}^{z_2}\,.
\end{aligned}$$

In particolare quindi $\mathrm{e}^{x+i\,y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{i\,y}$, e per l'esponenziale di un numero immaginario si può scrivere, separando nella serie le potenze pari da quelle dispari

$$\mathrm{e}^{i\,y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\, y^{2k}}{(2\,k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}\, y^{2k+1}}{(2\,k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, y^{2k}}{(2\,k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, y^{2k+1}}{(2\,k+1)!}\,,$$

e quindi, ricordando le serie reali che definiscono le funzioni seno e coseno sui reali, si perviene alla *formula di Eulero*

$$e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{14}$$

Usando questa nell'espressione di e^z si ha quindi

$$\mathrm{Re}\,e^z = e^x\,\cos y \qquad\qquad \mathrm{Im}\,e^z = e^x\,\sin y \qquad\qquad |e^z| = e^x\,. \tag{15}$$

Vale la pena osservare che in base a (14) vale la rappresentazione trigonometrica nella forma $z = \rho\,e^{i\,\theta}$, e che quindi, grazie a (13), è immediato riprodurre il ben noto risultato $|z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $\arg(z_1\,z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. In particolare per le potenze di un numero complesso si ritrova $|z^n| = |z|^n$ e $\arg(z^n) = n\,\arg z\,.$

Dalle (15) si vede poi che e^z diverge se $|z|$ diverge con $\mathrm{Re}\,z > 0$, mentre tende a zero se $|z|$ diverge con $\mathrm{Re}\,z < 0$, e si osserva il comportamento oscillatorio rispetto a $\mathrm{Im}\,z$ quando $\mathrm{Re}\,z$ viene tenuto costante. Si può anche osservare che $|e^{i\,x}| = 1$ e che e^z risulta essere in $\mathbb{C}$ una funzione periodica di periodo $2\,\pi\,i$, in quanto, qualunque sia l'intero k, risulta

$$e^{z+2\,k\,\pi\,i} = e^z\Big(\cos 2\,k\,\pi + i\,\sin 2\,k\,\pi\Big) = e^z\,. \tag{16}$$

Inoltre le (15) mostrano che e^z non si annulla mai in $\mathbb{C}$, in quanto $|e^z| > 0\ \forall z$, e si ha

$$\frac{1}{e^z} = \frac{e^{-\,x}}{\cos y + i\,\sin y} = e^{-\,x}\Big(\cos y - i\,\sin y\Big) = e^{-\,x}\,e^{-\,i\,y} = e^{-\,z}\,.$$

In modo perfettamente analogo si possono definire, per serie di potenze, le *funzioni trigonometriche nel campo complesso*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2\,n)!} \qquad\qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2\,n+1)!} \qquad\qquad z \in \mathbb{C} \tag{17}$$

ed è un semplice esercizio ricavare che una loro definizione equivalente è

$$\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-\,i\,z}}{2} \qquad\qquad \sin z = \frac{e^{i\,z} - e^{-\,i\,z}}{2\,i}\,. \tag{18}$$

Analogamente si potrebbero definire le *funzioni iperboliche*

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-\,z}}{2} = \cos(i\,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2\,n)!} \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-\,z}}{2} = -\,i\,\sin(i\,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2\,n+1)!}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

È facile verificare da (18) che le funzioni coseno e seno risultano anche in $\mathbb{C}$ periodiche di periodo $2\,\pi$, e che $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$. Da queste funzioni trascendenti elementari se ne possono dedurre diverse altre mediante le operazioni di cui $\mathbb{C}$ è dotato. Ad esempio

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}\,,$$

che ovviamente ha senso per gli $z \in \mathbb{C}$ che non sono zeri della funzione coseno, cioè che non sono radice dell'equazione $\mathrm{e}^{2\,i\,z} = -\,1$. Tutte queste funzioni sono facilmente esprimibili tramite le loro parti reale e immmaginaria u e v; ad esempio, usando (18), (15) e (19),

$$\cos z = \cosh y\,\cos x - i\,\sinh y\,\sin x\,.$$

In particolare, salvo ovvie e consuete limitazioni, le funzioni reali u e v che ne risultano sono continue in tutto $\mathbb{R}^2$, per cui le corrispondenti funzioni complesse sono continue in tutto $\mathbb{C}$.

3 Funzioni inverse e polidromia

Al contrario di quanto accade in $\mathbb{R}$, la funzione esponenziale risulterebbe a priori non invertibile, per l'ovvio motivo che è una funzione periodica, di periodo $2\,\pi\,i$, per cui sono infiniti i punti z che hanno lo stesso valore di e^z. In altre parole, se si vuole definire la *funzione logaritmo* in base alla proposizione consueta

$$w = \log z \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{e}^w = z\,, \tag{20}$$

si vede subito che se w_* soddisfa la definizione, altrettanto fanno $w_* + 2\,k\,\pi\,i$, qualunque sia l'intero k. Si può accettare la definizione (20) introducendo il concetto di "funzione a più valori", cioè funzione polidroma (dove, con un comune abuso di linguaggio, la parola "funzione" viene ovviamente usata impropriamente). Si può osservare che la definizione (20) implica la proprietà caratteristica

$$\log\big(z_1\,z_2\big) = \log z_1 + \log z_2 \qquad\qquad z_1\,,\ z_2 \neq 0 \tag{21}$$

(l'esclusione dell'origine deriva dal fatto che nessun $w \in \mathbb{C}$ ha esponenziale nullo, per cui la funzione $\log z$ non è definita per $z = 0$). Infatti dall'essere $w_1 = \log z_1$ e $w_2 = \log z_2$ segue $\mathrm{e}^{w_1}\,\mathrm{e}^{w_2} = \mathrm{e}^{(w_1+w_2)} = z_1\,z_2$ e quindi $w_1 + w_2 = \log\big(z_1\,z_2\big)$. In virtù delle (21) avremo allora

$$\log z = \log\big(\rho\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\big) = \log|z| + i\,\arg z \tag{22}$$

e la polidromia può essere interpretata in base alla facoltà di poter definire l'argomento θ di z in (1) a meno dell'addizione di multipli interi di $2\,\pi$. Il logaritmo che compare nell'ultimo membro della (22) è il logaritmo definito (e monodromo) in $\mathbb{R}$, applicato alla quantità positiva $|z|$. Si può scrivere anche

$$\mathrm{Re}\,(\log z) = \frac{1}{2}\,\log\left(x^2+y^2\right) \qquad\qquad \mathrm{Im}\,(\log z) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} \tag{23}$$

e le due funzioni risultano continue in $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine $x=0$, $y=0$, per cui $\log z$ risulta essere continua in $\mathbb{C}$ privato dell'origine $z=0$.

Uno studio approfondito della polidromia esula dagli scopi della presente nota, tuttavia se ne può percepire il significato con il seguente semplice ragionamento. Se, partendo dal punto $z=1$, pensato di modulo 1 e argomento 0, descriviamo in $\mathbb{C}$ una curva chiusa semplice e regolare Γ, facendo variare con continuità modulo e argomento, compiendo un giro in verso antiorario attorno all'origine, quando raggiungiamo di nuovo il punto $z=1$ dovremo coerentemente pensarlo di modulo 1 ma di argomento $2\,\pi$, ed il logaritmo di z, al variare di z in Γ, è variato anch'esso con continuità, passando dal valore iniziale 0 al valore finale $2\,\pi\,i$, diverso dall'iniziale, benché relativo allo stesso punto $z=1$. I due valori sono infatti tra le infinite possibili determinazioni del logaritmo di 1. Se la curva non è semplice ma gira k volte attorno all'origine, con k intero (k negativo significa che si gira in verso orario), il valore finale risulta essere $2\,k\,\pi\,i$. Se la curva semplice e chiusa considerata, indipendentemente dalle sue forme e dimensioni, non gira invece attorno all'origine ($z=0$ non è al suo interno), la variazione continua dell'argomento θ fa sì che l'argomento da attribuire al punto finale sia ancora 0, e che quindi anche $\log z$ ripristini, tornando in $z=1$, il valore 0 da cui era partito. Il fenomeno si ripeterebbe ovviamente partendo da qualunque altro punto $z\neq 1$. La polidromia nasce quindi dalla circolazione attorno al punto $z=0$, che effettivamente è un punto singolare per la funzione logaritmo (non fa parte del suo dominio A). La polidromia può quindi essere evitata se in qualche modo si impedisce la circolazione attorno al punto singolare, che in questi casi si chiama *punto di diramazione*. Ciò può essere ottenuto nel nostro caso tagliando il piano complesso $\mathbb{C}$ lungo una semiretta uscente dall'origine (taglio o retta di diramazione) e definendo $\log z$ con dominio A costituito dal piano così tagliato, in cui nessuna curva chiusa può contenere l'origine al suo interno. Si noti che il piano tagliato resta un dominio semplicemente connesso, cioè ogni curva chiusa contiene al suo interno solo punti del dominio. Chiaramente tale limitazione corrisponde a determinare univocamente il valore dell'argomento di un complesso $z \in A$, che potrà variare solo su un intervallo di ampiezza $2\,\pi$. Le infinite determinazioni individuate da $k\in\mathbb{Z}$, e che differiscono tra loro per multipli di $2\,\pi$, corrispondono alle infinite determinazioni che caratterizzavano originariamente $\log z$. La scelta del taglio e della determinazione (generalmente, per chiari motivi di semplicità, $k=0$) definiscono quindi $\log z$ come una funzione monodroma e continua nel dominio costituito dal piano $\mathbb{C}$ tagliato. Ovviamente occorre avere in mente la differenza concettuale tra la funzione logaritmo pensata polidroma e definita in tutto il piano complesso privato dell'origine e la funzione logaritmo pensata invece monodroma e ristretta al piano complesso tagliato, ed anche avere precauzione nel loro uso, in quanto non godono delle stesse proprietà nelle due accezioni. L'accezione usualmente accettata per la funzione monodroma (il cosiddetto logaritmo principale) è quella che prevede il taglio lungo il semiasse reale negativo, e quindi gli argomenti ristretti all'intervallo $-\pi < \theta < \pi$ (entrambi gli estremi esclusi). In questo modo la parte immaginaria è necessariamente compresa tra $-\pi i$ e πi. La restrizione ad $\mathbb{R}^+$ riproduce il logaritmo reale, mentre non è definito il logaritmo dei reali negativi. Se $z \to -1$ con $\mathrm{Im} z > 0$ (cioè con $\theta \to \pi$), allora il suo logaritmo tende a πi, mentre se $z \to -1$ con $\mathrm{Im} z < 0$ (cioè con $\theta \to -\pi$), allora il suo logaritmo tende a $-\pi i$, evidenziando come un eventuale ripristino del taglio, accettando ad esempio il valore $\theta = \pi$, darebbe luogo ad una funzione discontinua.

Come la funzione esponenziale e^z è il prototipo per diverse funzioni trascendenti, così la sua inversa $\log z$ consente di definire altre classi importanti di funzioni. La *potenza* z^α con $z \in \mathbb{C}$ ed esponente $\alpha \in \mathbb{C}$ viene definita, in analogia ai reali, come

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \log z}, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \ \ \textit{assegnato} \tag{24}$$

e, come la funzione logaritmo, non è definita per $z = 0$. La polidromia di $\log z$ si trasmette ovviamente a z^α, nel senso che se $(z^\alpha)_*$ è un valore per la potenza α di z, allora lo sono anche tutti i valori $(z^\alpha)_* \, \mathrm{e}^{2k\alpha\pi i}$, qualunque sia l'intero k. Si può osservare che se α è un intero, anche $k\,\alpha$ è un intero m, e poiché $\mathrm{e}^{2\,m\,\pi\,i} = 1$, la polidromia scompare e si riproduce la funzione elementare (e monodroma) della potenza intera m di z. In particolare, per $\alpha = -1$, la funzione $1/z$ già incontrata presenta come si è visto un punto singolare in $z = 0$, che però non è più un punto di diramazione. Se α è un intero positivo n, si fa vedere che la singolarità è addirittura rimovibile, prolungando la funzione a $z = 0$ per continuità con il valore zero. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, usando (22) in (24) si ha subito $z^\alpha = \rho^\alpha \, \mathrm{e}^{i\,\alpha\,\theta}$ e quindi

$$|z^\alpha| = |z|^\alpha \qquad \arg z^\alpha = \alpha \, \arg z \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{25}$$

Allora le infinite determinazioni di z^α si ottengono moltiplicando una di esse, assunta come valore principale, per tutti i fattori del tipo esponenziale immaginario $\mathrm{e}^{i\,2\,\pi\,k\,\alpha}$, con k intero. Un caso particolarmente significativo è $\alpha = \frac{1}{n}$, con n intero positivo (e maggiore di 1). In tal caso i fattori precedenti sono del tipo $\mathrm{e}^{i\,2\,\pi\,k/n}$, ed i loro valori non sono infiniti, ma al variare di k si ripetono ciclicamente con periodo n (nel senso che $k = \pm\, n, \pm\, 2\, n, \ldots$ danno lo stesso risultato di $k = 0$, e così via). Pertanto le determinazioni di $z^{1/n}$ sono soltanto in numero di n, e corrispondono ai valori $k = 0, 1, \ldots, n-1$, riproducendo ancora un ben noto risultato sulla radice n–esima di un numero complesso: l'equazione $w^n = z$ ha esattamente n soluzioni in $\mathbb{C}$. Tali soluzioni si possono facilmente rappresentare in forma trigonometrica: se $z = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, allora a $z^{1/n}$ corrispondono n numeri complessi di modulo $\sqrt[n]{\rho}$ e argomenti $(\theta + 2\,k\,\pi)/n$.

Salvo i casi particolari importanti appena descritti, z^α presenta un punto di diramazione in $z = 0$, e può essere resa monodroma tagliando il piano complesso come si è fatto per $\log z$. Assumendo come funzione monodroma la determinazione principale che corrisponde alla restrizione $-\pi < \theta < \pi$ degli argomenti, si ha ad esempio una radice quadrata di z che è reale e positiva in corrispondenza ai reali positivi, non è definita in corrispondenza ai reali negativi, tende a i se $z \to -1$ con $\mathrm{Im} z > 0$, e tende a $-i$ se $z \to -1$ con $\mathrm{Im} z < 0$. La funzione polidroma $z^{1/2}$ definita da (24) associa invece ad ogni $z \in \mathbb{C}$ due valori, che risultano essere l'uno l'opposto dell'altro.

4 Funzioni analitiche

Se i teoremi sui limiti di funzioni reali possono essere estesi in modo naturale al caso di una variabile complessa, ci sono però delle situazioni dove il modo in cui $z \to z_0$ gioca un ruolo importante. Questo è il caso quando si cerca di definire la derivata di una funzione $f(z)$ rispetto a z pensata come singola variabile (non quindi una derivata parziale rispetto a x o y) in un certo punto z_0 interno al dominio di definizione. Si tratta di introdurre in $\mathbb{C}$ un incremento $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$, considerare il rapporto incrementale $\Delta f/\Delta z$ con $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, e vedere se ne esiste il limite per $\Delta z \to 0$, nel senso della convergenza in $\mathbb{C}$, nel qual caso la f si dirà derivabile in z_0 e il limite sarà la derivata di f calcolata in z_0; in simboli, $f'(z_0)$ oppure $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.

Definizione 4.1 *Si dice che $f(z)$ è una funzione analitica, o olomorfa, in un certo aperto $A \subset \mathbb{C}$ se essa risulta derivabile in ogni punto $z_0 \in A$.*

Supponendo, per garantirci una sufficiente regolarità, che $u = \mathrm{Re} f$ e $v = \mathrm{Im} f$ siano di classe C^1 nel dominio di interesse, avremo

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i\,v(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - i\,v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\,\Delta y} \tag{26}$$

e non è difficile far vedere che, indipendentemente dalle proprietà di regolarità di u e v, il limite per $\Delta z \to 0$ dipende dal rapporto tra Δx e Δy nel loro tendere a zero, o, in altre parole, dipende dalla direzione secondo cui $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. È immediato ricavare da (26)

$$\begin{aligned}
\Delta y = 0 \;:\quad & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\
\Delta x = 0 \;:\quad & \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\dfrac{1}{i} = -i$, e omettendo gli argomenti x_0 e y_0, si può dire quindi che condizione solo necessaria per l'esistenza del limite, e quindi della derivata, è che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{27}$$

In realtà, se il rapporto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tende ad un preciso valore limite m quando Δx e Δy tendono a zero, allora si riesce a far vedere che

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + m\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}{1 + i\,m}\,,$$

che evidenzia la dipendenza dalla direzione m. In effetti, le condizioni (27) sono esattamente quelle che garantiscono l'indipendenza da m del rapporto precedente, e quindi l'esistenza del limite. In ogni caso, queste considerazioni mostrano che l'esistenza di una derivata in z_0 richiede che tra le quattro derivate parziali di u e v in (x_0, y_0) esistano due ben precisi legami, cioè le (27), che prendono il nome di *condizioni di Cauchy–Riemann*. Senza addentrarci ulteriormente nell'argomento, ci limitiamo a riportare il teorema che stabilisce anche la sufficienza delle precedenti condizioni di analiticità.

Teorema 4.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché $f = u + i\,v$ sia analitica in un aperto $A \subset \mathbb{C}$ è che le funzioni u e v siano di classe C^1 in A e che in ogni punto $(x, y) \in A$ siano soddisfatte le condizioni di Cauchy–Riemann (27),*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

È del tutto ovvio che se f è analitica in A, è anche continua in A. È chiaro inoltre che la classe delle funzioni analitiche è abbastanza ristretta, in quanto non basta scegliere due funzioni, regolari fin che si vuole, u e v ed accoppiarle come $u + i\,v$, in quanto tra u e v devono esistere precisi legami. Questo fatto fa sì che le funzioni analitiche godano di proprietà sorprendenti, alcune delle quali verranno discusse più oltre. Se ad esempio si suppone che u e v siano anche di classe C^2, semplici derivazioni delle (27) e l'uso del teorema di inversione delle derivate seconde miste portano subito al risultato che u e v sono funzioni armoniche, cioè soddisfano l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,.$$

Il fatto poi che la derivata sia stata definita esattamente come nei reali mediante il limite del rapporto incrementale fa sì che si possano trasportare ai complessi tutti i teoremi più importanti sulle derivate e sulle funzioni derivabili. Può essere utile osservare che

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\,. \tag{28}$$

Un teorema importante, che è peculiare dell'analiticità e non trova riscontro in $\mathbb{R}$, e che verrà richiamato nel seguito, è il seguente, che qui riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 4.3 *Se f è analitica in A, allora f è derivabile infinite volte in A (come si suol dire, è di classe C^∞ in A), ed ogni punto $z_0 \in A$ può essere fatto centro della rappresentazione in serie di Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n\,, \qquad |z - z_0| < r \tag{29}$$

con raggio di convergenza r positivo.

5 Esempi di funzioni analitiche

Esaminiamo nel seguito alcune importanti funzioni complesse di variabile complessa, con le relative Re ed Im, discutendo dominio di analiticità, condizioni di Cauchy–Riemann, calcolo della derivata. È notevole il fatto che, benché la classe delle funzioni analitiche sia molto selettiva, vi appartengono tutte le principali funzioni elementari e trascendenti precedentemente introdotte in $\mathbb{C}$.

a) $f(z) = z \qquad u = x \qquad v = y \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 = \dfrac{\partial v}{\partial y} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$f'(z) = 1 + i\,0 = 1, \qquad$ analitica in $\mathbb{C}$.

b) $f(z) = z^2 \qquad u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\,2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$f'(z) = 2\,x + i\,2\,y = 2(x + i\,y) = 2\,z, \qquad$ analitica in $\mathbb{C}$.

c) $f(z) = \bar{z} = x - i\,y \qquad u = x \qquad v = -\,y \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\,1.$

Malgrado la sua semplicità (e regolarità in termini reali), non è derivabile in alcun punto. È solo un esempio nel mare delle funzioni non derivabili. Ad esempio, salvo il caso banale della costante, nessuna funzione puramente reale o immaginaria può essere analitica.

d) $f(z) = z^3 = z^2\,z$ è analitica in quanto prodotto di funzioni analitiche, in tutto $\mathbb{C}$

$f'(z) = \dfrac{d}{dz}(z^2)z + z^2\,\dfrac{d}{dz}(z) = 2\,z^2 + z^2 = 3\,z^2\,.$

e) Procedendo per induzione, $f(z) = z^n$ è analitica in $\mathbb{C}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, con $f'(z) = n\,z^{n-1}$.

f) $f(z) = \dfrac{1}{z} \qquad A = \mathbb{C} - \{0\} \qquad u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \qquad v = -\,\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\,\dfrac{2\,x\,y}{(x^2 + y^2)^2} = -\,\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$f'(z) = -\,\dfrac{x^2 - y^2 - 2\,i\,x\,y}{(x^2 + y^2)^2} = -\,\dfrac{(x - i\,y)^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\,\dfrac{1}{(x + i\,y)^2} = -\,\dfrac{1}{z^2}\,, \quad$ analitica in A.

g) $f(z) = \mathrm{e}^z \qquad u = \mathrm{e}^x \cos y \qquad v = \mathrm{e}^x \sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,\mathrm{e}^x \sin y = -\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \mathrm{e}^x \cos y + i\,\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^x\big(\cos y + i \sin y\big) = \mathrm{e}^{x+i\,y} = \mathrm{e}^z, \qquad \text{analitica in } \mathbb{C}\,.$$

h) $f(z) = \mathrm{e}^{\alpha\,z}$ è analitica come composizione di funzioni analitiche, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \mathrm{e}^{\alpha\,z}\,\frac{d}{dz}(\alpha\,z) = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha\,z}\,.$$

i) $f(z) = \mathrm{e}^{z^2}$ è analitica come composizione di funzioni analitiche, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \mathrm{e}^{z^2}\,\frac{d}{dz}(z^2) = 2\,z\,\mathrm{e}^{z^2}\,.$$

l) $f(z) = \log z \qquad A = \mathbb{C} - \{0\} \qquad u = \dfrac{1}{2}\,\log(x^2+y^2) \qquad v = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} = -\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x - i\,y}{(x+i\,y)(x-i\,y)} = \frac{1}{x+i\,y} = \frac{1}{z}\,, \qquad \text{analitica in } A.$$

m) $f(z) = \log\big[\varphi(z)\big]$ analitica se $\varphi(z)$ analitica, ad eccezione dei punti in cui $\varphi(z) = 0$

$$f'(z) = \frac{1}{\varphi(z)}\,\frac{d}{dz}\big[\varphi(z)\big] = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Ad esempio $f(z) = \log(z - z_0)$ è analitica in $A = \mathbb{C} - \{z_0\}$ con $f'(z) = \dfrac{1}{z - z_0}\,.$

n) $f(z) = z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\,\log z}$ è analitica in $A = \mathbb{C} - \{0\}$ come composizione di funzioni analitiche

$$f'(z) = \mathrm{e}^{\alpha\,\log z}\frac{d}{dz}\big(\alpha\,\log z\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha\,\log z}\,\frac{1}{z} = \alpha\,z^{\alpha-1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

o) $f(z) = \sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{i\,z} - \mathrm{e}^{-i\,z}}{2\,i}$ è analitica in $\mathbb{C}$ come composizione di funzioni analitiche

$$f'(z) = \frac{i\,\mathrm{e}^{i\,z} - (-\,i)\mathrm{e}^{-i\,z}}{2\,i} = \frac{\mathrm{e}^{i\,z} + \mathrm{e}^{-i\,z}}{2} = \cos z\,.$$

p) $f(z) = \cosh z = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$ è analitica in $\mathbb{C}$ come composizione di funzioni analitiche

$$f'(z) = \frac{\mathrm{e}^z + (-1)\mathrm{e}^{-z}}{2} = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} = \sinh z\,.$$

E analogamente sono funzioni analitiche i polinomi di qualunque grado, le funzioni razionali, in tutti i punti che non sono zeri del denominatore, la funzione $\mathrm{tg}z$, tranne nei punti che sono zeri di $\cos z$, e così via. Si può osservare che la presenza di tali punti singolari rende in generale non semplicemente connesso l'aperto A in cui f è analitica, ma esistono aperti $B \subset A$ semplicemente connessi in cui f è analitica. Ad esempio, per quanto riguarda i punti singolari di tg$z$ (zeri della funzione coseno) si ha, come già visto, $\mathrm{e}^{2\,i\,z} = -\,1$ da cui $2\,i\,z = \log(-\,1)$ e quindi

$$2\,i\,z = 0 + i\big(\pi + 2\,k\,\pi\big) \Longrightarrow z = \frac{2\,k+1}{2}\,\pi \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

che sono esattamente gli zeri (reali) della funzione reale $\cos x$. Non ci sono quindi zeri non reali per la funzione $\cos z$ (analogamente si trovano gli zeri di $\sin z$). I punti singolari di tg$z$ sono quindi una infinità numerabile e si accumulano all'infinito.

6 Integrazione nel campo complesso

Analogamente alla derivata, si vorrebbe definire, come nei reali, l'integrale di una funzione complessa di variabile complessa tra due estremi assegnati z_1 e z_2, senza alcun altra specifica. Si suppone qui che la funzione f da integrare sia monodroma. L'integrazione in campo complesso incontra immediatamente dei problemi, in quanto l'unico modo di pensare integrali tra due punti nel piano $\mathbb{C}$ è riferirsi ad integrali di linea, e il risultato dell'integrale stesso viene in generale a dipendere dal cammino γ che congiunge z_1 e z_2.

Si può ricondurre in modo spontaneo l'integrazione complessa di $f = u + i\,v$ a quella reale di u e v mediante la definizione

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \big(u\,dx - v\,dy\big) + i\int_\gamma \big(v\,dx + u\,dy\big)\,. \tag{30}$$

Si può osservare quindi che l'integrale di linea lungo γ esiste con ipotesi abbastanza "larghe" su u e v, certamente esiste se f è continua. Si tratta di integrare due forme differenziali lineari del tipo $X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$, con $X = u$, $Y = -\,v$, oppure $X = v$, $Y = u$. Essendo interessati alle condizioni per cui gli integrali non dipendono da γ, ricordiamo il teorema sulle forme differenziali reali per cui ciò accade quando γ appartiene ad un dominio semplicemente connesso D in cui X e Y sono di classe C^1 e soddisfano la condizione $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$. Applicando tale risultato a (30), con le due specifiche indicate per X e Y, vediamo allora che u e v devono essere di classe C^1 e per la prima forma differenziale deve essere $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\,\dfrac{\partial v}{\partial x}$, mentre per la seconda deve essere $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Tali condizioni coincidono esattamente con le condizioni di Cauchy–Riemann (27). Riproduciamo dunque proprio la definizione di analiticità, o, in altre parole, constatiamo come in $\mathbb{C}$ finiscano essenzialmente per coincidere le condizioni di derivabilità e quelle di integrabilità. Poiché negli integrali curvilinei le nozioni di integrale indipendente dal percorso e integrale nullo su una curva chiusa sono equivalenti, possiamo enunciare il risultato appena ottenuto sotto forma di teorema.

Teorema 6.1 (Teorema di Cauchy) *Se la funzione $f(z)$ è analitica in un dominio semplicemente connesso $D \subset \mathbb{C}$, e Γ una qualunque curva chiusa contenuta in D, si ha*

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 0\,. \tag{31}$$

Nelle stesse ipotesi del teorema di Cauchy ha senso allora definire

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz \tag{32}$$

in quanto il risultato dell'integrazione è indipendente dal cammino γ che unisce gli estremi, e quindi, una volta fissato il punto di riferimento z_0, l'integrale dipende effettivamente solo dall'estremo superiore z, e resta definita univocamente l'applicazione $F = U + i\,V$.

I teoremi fondamentali dell'integrazione (curvilinea) reale si estendono direttamente, in base alla definizione, all'integrale complesso, e quindi in particolare si ha $F(z_0) = 0$ in (32). Usando poi la (30), e ricorrendo ancora a risultati dell'analisi reale, è possibile dimostrare che U e V sono a loro volta C^1 in D, e che risulta $\dfrac{\partial U}{\partial x} = u = \dfrac{\partial V}{\partial y}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\,v = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$. La funzione F è quindi derivabile in ogni punto di D, con $F' = \dfrac{\partial F}{\partial x} = u + i\,v = f$. La F gioca quindi il ruolo di primitiva, o funzione integrale, di f e vale il

Teorema 6.2 *La funzione integrale F definita in (32) è analitica in D con derivata*

$$F'(z) = f(z)\,. \tag{33}$$

In particolare si può scrivere

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1) \tag{34}$$

che rappresenta l'analogo del teorema di Torricelli per i reali.

Le (32)–(34) consentono quindi (ammesso di saper determinare effettivamente la primitiva F) di calcolare gli integrali complessi di una funzione analitica quando il suo dominio di analiticità A è semplicemente connesso. Quando ciò non accade, cioè quando esistono in $\mathbb{C}$ punti in cui f non è definita o non è derivabile, rendendo A non semplicemente connesso, si può procedere ugualmente allo stesso modo senza problemi se il dominio su cui interessa lavorare è un sottoinsieme di A semplicemente connesso, a cui quindi sono esterni tutti i punti singolari. Se ciò non accade, cioè se il dominio di interesse è tutto A o un suo sottinsieme non semplicemente connesso, l'integrale su una curva chiusa che contenga un punto singolare non è più necessariamente nullo, e di conseguenza l'integrale da z_1 a z_2 assume valori diversi, in generale, se si segue una curva semplice che passi da un lato oppure dall'altro del punto singolare (non considereremo in questa sede integrali "generalizzati" con punti singolari sul percorso). In altre parole, si può introdurre ancora una funzione integrale F mediante (32), con $F' = f$, ma la $F(z)$ che ne risulta è in generale "a più valori", cioè rientra nella classe delle funzioni polidrome, benché la f che integriamo sia monodroma. Un esempio evidente di questo fatto è dato dalla funzione $1/z$, che ha un punto singolare in $z = 0$, per cui l'insieme di analiticità non è semplicemente connesso in $\mathbb{C}$, nè in alcun altro dominio D contenente l'origine. Infatti la sua primitiva è $\log z$, che è il prototipo delle funzioni polidrome, con punto di diramazione in $z = 0$. Se ad esempio si considera un dominio semplicemente connesso di analiticità D che escluda l'origine e il semiasse immaginario negativo, e si vuole calcolare l'integrale di $1/z$ da $z_1 = 1$ a $z_2 = -1$, è lecito usare la (34), dove, se a z_1 si attribuisce argomento 0, a z_2 occorre attribuire argomento π, per cui, con $F(z) = \log z$, il risultato dell'integrale è $\pi\, i$. Se invece il dominio D esclude l'origine e il semiasse immaginario positivo, e si considera l'integrale di $1/z$ tra gli stessi estremi (quindi il percorso γ passa dalla parte opposta dell'origine rispetto a prima), allora si può ancora usare la (34) con $F(z) = \log z$, ma se a z_1 si attribuisce argomento 0, ora a z_2 si deve attribuire argomento $-\pi$, e quindi il risultato dell'integrazione sarà $-\pi\, i$, diversamente da prima. Si può osservare però che la presenza di un punto singolare non induce necessariamente polidromia della primitiva. Ne è semplice esempio la funzione $f(z) = 1/z^2$, ancora singolare in $z = 0$, la cui primitiva è $F(z) = -1/z$, monodroma. Ripetendo lo stesso ragionamento precedentemente applicato al logaritmo con i due diversi percorsi di integrazione da 1 a -1, indipendentemente dall'argomento da attribuire a $z_2 = -1$, la funzione F in z_2 vale 1, ed in entrambi i casi il risultato dell'integrazione è 2.

Quando la determinazione della primitiva non è agevole, o non è possibile, è sempre possibile svolgere le integrazioni coi metodi degli integrali curvilinei, ad esempio parametrizzando opportunamente la curva. A titolo esemplificativo calcoliamo l'integrale di z^{-n}, $n = 1, 2, \ldots$ sulla curva chiusa Γ con centro nell'origine e raggio 1. Il punto mobile sulla curva può essere parametrizzato come $z = \mathrm{e}^{i\,\theta}$, al variare del parametro θ da 0 a $2\,\pi$. Corrispondentemente si ha $dz = i\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,d\theta$, e quindi,

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\,\pi} \mathrm{e}^{-\,i\,n\,\theta} i\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,d\theta = i \int_0^{2\,\pi} \mathrm{e}^{-\,(n-1)\,i\,\theta}\,d\theta\,.$$

Ci si è così ricondotti ad un integrale reale, sia pure di variabile complessa, che può essere calcolato in modo standard, e, per $n \neq 1$, fornisce

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z^n} = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\,(n-1)\,i\,\theta}}{n-1}\right]_0^{2\,\pi} = \frac{\mathrm{e}^{-\,(n-1)\,2\,\pi\,i} - 1}{n-1} = 0 \qquad \forall n > 1\,. \tag{35}$$

Si può notare che malgrado la singolarità in $z = 0$ contenuta in Γ, vale comunque un risultato che ricalca quello che sarebbe stato il teorema di Cauchy, se si fosse potuto usare. In effetti, questo è il motivo per cui si può definire senza problemi una funzione integrale, che risulta monodroma. Infatti, per $f(z) = z^{-n}$, si ha $F(z) = -\dfrac{z^{-(n-1)}}{n-1}$. Se invece $n = 1$ si ha

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\,\pi\, i\,, \tag{36}$$

diverso da zero, coerentemente col teorema di Cauchy, e coincidente coi risultati precedentemente trovati discutendo della polidromia della primitiva, che è ora $\log z$. La stessa tecnica può essere usata per integrare su Γ anche le potenze positive z^n, $n = 1, 2, \ldots$ Si verifica facilmente che si trova risultato nullo $\forall n$, ma questo poteva essere stabilito subito a priori, in quanto ora vale il teorema di Cauchy. Le stesse metodologie possono applicarsi agli integrali di funzioni polidrome, purché queste siano state rese monodrome mediante gli opportuni tagli di diramazione nel piano complesso.

Appendice

Distribuzioni e delta di Dirac

Si consideri la famiglia di funzioni della variabile reale $x \in \mathbb{R}$, dipendenti dal parametro $\alpha > 0$

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha} & -\alpha < x < \alpha \\ 0 & |x| > \alpha \end{cases} \tag{A.1}$$

(i valori in $x = \pm\alpha$ sono inessenziali ai nostri scopi). Dalla definizione stessa si ha immediatamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha}dx = 1 \qquad \forall\alpha > 0, \tag{A.2}$$

vale a dire tutte le funzioni della famiglia sottendono area unitaria, indipendentemente dal loro "supporto" $(-\alpha, \alpha)$. Al diminuire di α, il valore comune di tale area viene concentrato su un intervallo sempre più piccolo, centrato in $x = 0$. Il valore limite di tale area per $\alpha \to 0$ vale evidentemente ancora 1, e viene spontaneo chiedersi quale sia, ammesso che esista, la funzione limite della famiglia, sempre al tendere a zero del parametro α. Prendendo il limite punto per punto si vede subito che

$$\lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(x) = 0 \quad \forall x \neq 0, \qquad\qquad \lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(0) = +\infty. \tag{A.3}$$

La seconda formula è immediata in quanto $g_\alpha(0) = 1/(2\alpha)$; per la prima basta osservare che, scelto un qualunque $x_0 \neq 0$, non appena si prenda $\alpha < |x_0|$, dalla (A.1) segue subito $g_\alpha(x_0) = 0$. La funzione limite risulta quindi essere la funzione nulla quasi dappertutto, in quanto diversa da zero solo in $x = 0$, che è un insieme di misura nulla (ha coperture aperte di misura minore di qualunque ϵ prefissato). Benché il valore da attribuire ad $x = 0$ non sia limitato, la funzione limite non corrisponde all'idea intuitiva di un oggetto che sottende un'area unitaria su una base di lunghezza nulla, oggetto che infatti non è possibile descrivere con una ordinaria funzione. Il problema può essere spiegato nell'ambito della *teoria delle distribuzioni*, che è ben oltre gli scopi dei presenti appunti, ma di cui si cercherà di dare una descrizione elementare. L'oggetto sopra citato sarà un elemento di un insieme che amplia quello delle funzioni, l'insieme appunto delle distribuzioni.

E' significativo il fatto che, nella teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, l'integrale di una funzione nulla quasi dappertutto sia necessariamente nullo, per cui risulta

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x)dx\right) = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(x)\right)dx, \tag{A.4}$$

mostrando la non liceità dell'inversione delle due operazioni (limite rispetto ad α, integrazione rispetto ad x) in questo caso. Si può anche far vedere che non esiste una norma rispetto a cui la famiglia di funzioni g_α risulti essere convergente per $\alpha \to 0$. Si può però sostituire a questa convergenza "forte" una convergenza più debole, basata sul modo in cui gli elementi della famiglia agiscono su opportune funzioni "test", una classe di funzioni φ della variabile $x \in \mathbb{R}$, che ci riserviamo di prendere regolari quanto basta ai nostri fini, ed in particolare, nel nostro caso, continue. Considerata una funzione $g(x)$, possiamo operare con essa sulle funzioni test φ nel modo seguente

$$G[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx, \tag{A.5}$$

garantendo che l'integrale converga, associando così ad ogni funzione test φ un numero reale $G[\varphi]$. Si è costruito così un funzionale, un'applicazione che manda la classe delle funzioni test nei reali. La funzione g identifica il funzionale G. Possiamo allora costruirci la famiglia di funzionali, dipendenti dal parametro $\alpha > 0$,

$$G_\alpha[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x)\varphi(x)dx. \tag{A.6}$$

Vediamo come si comporta la famiglia di funzionali al tendere a zero del parametro. Ricordando il teorema della media per l'integrazione delle funzioni continue, è immediato vedere che, nella sola ipotesi che la funzione test φ sia continua in un intorno dell'origine, si ha

$$\lim_{\alpha\to 0} G_\alpha[\varphi] = \lim_{\alpha\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x)\varphi(x)dx = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x)dx = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2\alpha} 2\alpha\varphi(\xi) = \varphi(0), \tag{A.7}$$

dove ξ è un opportuno punto dell'intervallo $(-\alpha, \alpha)$, e dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che ξ tende a zero per $\alpha \to 0$ e che φ è continua. Questo risultato vale qualunque sia la funzione test φ, e definisce un funzionale limite, quello che associa ad ogni funzione test il suo valore in $x = 0$: $\lim_{\alpha\to 0} G_\alpha[\varphi] = \varphi(0)$. Identificando i concetti di funzionale e di distribuzione, dove per distribuzione si intende l'oggetto g che compare nell'espressione (A.5) del funzionale, possiamo dire che resta individuata nel passaggio al limite una distribuzione che, operando sulle funzioni test come in (A.5), produce come risultato $\varphi(0)$. Questo "oggetto" lo indicheremo con $\delta(x)$, *distribuzione delta di Dirac*, e non sarà una funzione, al contrario delle distribuzioni g_α corrispondenti ai G_α, in quanto nessuna funzione nel senso ordinario del termine può produrre $\varphi(0)$ operando su φ come in (A.5). Questo manifesta il fatto che l'insieme delle distribuzioni è più ampio di quello delle funzioni, in quanto esistono funzionali che non sono associabili a funzioni. Tuttavia ogni distribuzione è individuata dal relativo funzionale, e la delta di Dirac può essere pensata come limite in senso distribuzionale (il nuovo concetto di convergenza) della famiglia g_α per $\alpha \to 0$. Dunque $\delta(x)$ non è definita punto per punto come un'ordinaria funzione (anche se viene comunemente chiamata, con abuso di linguaggio, "funzione" delta di Dirac), ma unicamente tramite il relativo funzionale, cioè in base a come opera nella classe delle funzioni test

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \tag{A.8}$$

che, nel caso particolare $\varphi(x) = 1$, riproduce l'atteso risultato $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$. Si può notare che l'accezione distribuzionale della convergenza è stata definita in modo che torni lecita l'inversione dell'ordine delle operazioni (limite rispetto ad α ed integrazione rispetto ad x) che era stato precedentemente violato in (A.4), in cui il limite era un ordinario limite puntuale.

E' poi possibile far vedere che la $\delta(x)$ gode di diverse proprietà che richiamano le idee intuitive precedentemente considerate. In particolare, qualunque siano i numeri reali a e b, con $a < b$

$$\int_a^b \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad \text{se } 0 \in (a,b), \qquad \int_a^b \delta(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \text{se } 0 \notin (a,b), \tag{A.9}$$

consentendo così di visualizzare la "funzione" delta di Dirac come localizzata nel punto zero, dove è presente una singolarità di tipo particolare che vi concentra un'area unitaria, e come una funzione nulla in tutti gli altri punti dell'asse reale. Si può osservare anche che il corrispondente funzionale rappresenta la media pesata di φ nell'intervallo di integrazione, con la peculiarità che la $\delta(x)$ attribuisce tutto il suo peso al solo punto $x = 0$, e peso nullo a tutti gli altri, per cui il risultato che si ottiene non risente in alcun modo dei valori che φ assume al di fuori dell'origine. In ogni caso la distribuzione δ risulta sempre definita in base a come opera nella classe di funzioni test considerata, e quindi tramite un integrale del tipo (A.8). In questo modo è possibile attribuire significato anche a scritture in cui l'argomento di δ non sia x, ma una ulteriore funzione (regolare) della x stessa. Basta infatti usare per sostituzione tale funzione come nuova variabile di integrazione per ricondursi alla definizione (A.8) e dedurre il relativo risultato. Ad esempio, per $\delta(ax)$, $a \neq 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\varphi(x)dx = \text{sgn}(a)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{|a|}\varphi(x)dx \tag{A.10}$$

qualunque sia la funzione test, e quindi $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$. In particolare, $\delta(x)$ è "funzione pari", nel senso che $\delta(-x) = \delta(x)$. Analogamente

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0) \ \ \forall x_0 \in (a,b), \qquad \int_a^b \delta(x-x_0)\varphi(x)dx = 0 \ \ \forall x_0 \notin (a,b). \tag{A.11}$$

Non si considera qui la possibilità che la δ sia localizzata in un estremo di integrazione. Sempre da (A.9) segue poi

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x')dx' = 0 \quad \forall x < 0, \qquad \int_{-\infty}^{x} \delta(x')dx' = 1 \quad \forall x > 0, \tag{A.12}$$

che mette in evidenza come la funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{A.13}$$

possa essere interpretata come una primitiva di $\delta(x)$. Tale funzione è un prototipo di non derivabilità, a causa della sua discontinuità (con salto finito unitario) in $x = 0$. Tuttavia è possibile dare significato in senso distribuzionale alla sua derivata, e scrivere

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x). \tag{A.14}$$

In altre parole, la funzione $H(x)$ non è derivabile per $x \in \mathbb{R}$, e pertanto la sua derivata non esiste come funzione, però esiste come distribuzione ed è data proprio dalla delta di Dirac.

Le poche ma importanti proprietà qui sopra discusse della δ di Dirac sono già sufficienti a spiegare la sua rilevanza nell'ambito della matematica applicata. Dal punto di vista fisico basta ricordare che tale funzione si incontra inevitabilmente ogni qual volta si voglia concentrare in punti discreti proprietà che sarebbero distribuite su volumi, in una o più dimensioni. E' questo il caso di concetti e strumenti indispensabili quali il punto materiale della meccanica e la carica puntiforme dell'elettromagnetismo. In tali casi, a dover essere rappresentate come "funzioni" δ, sono la densità di massa e la densità di carica elettrica.