

UN PROGETTO DI INNOVAZIONE DIDATTICA NELL'APPROCCIO AI NUMERI RAZIONALI E AL PENSIERO TEORICO

Giampaolo Chiappini**, Piero Corradi*, Marina Molinari*, Alfonsina Sibilla*
** I.M.A. -C.N.R.; * N.R.D. Genova, Scuola dell'Obbligo

1. Introduzione

Nel precedente internuclei avevamo presentato un progetto di ingegneria didattica per l'approccio ai numeri razionali (Chiappini & Al, 1999)

Le sperimentazioni condotte avevano messo in luce che l'uso integrato di uno strumento di rappresentazione grafico basato sul teorema di Talete proposto per l'attività e della notazione frazionaria poteva giocare un ruolo importante nell'approccio ai numeri razionali. L'esame critico delle sperimentazioni condotte avevano mostrato anche limiti nella passata gestione didattica dell'attività. Più in particolare si erano evidenziate difficoltà nel favorire un'evoluzione delle giustificazioni degli alunni dal piano operativo e percettivo legato all'uso della rappresentazione geometrica a giustificazioni delle proprietà del nuovo sistema numerico oggetto di studio più fondate da un punto di vista teorico. Nello scorso anno scolastico abbiamo sperimentato in una classe seconda della scuola media un nuovo percorso didattico strutturato in modo tale da favorire tale evoluzione. La nuova impostazione didattica si situa all'interno di un vasto corpo di ricerche sul quale il Nucleo di ricerca sulla Didattica della Matematica e la Formazione Scientifica di Genova è impegnato da alcuni anni. Tali ricerche hanno come fine lo studio delle condizioni che possono consentire agli alunni di avvicinarsi al pensiero teorico all'interno di differenti domini di conoscenza della matematica. Boero, Garuti, Pedemonte, Robotti presentano a questo Internuclei una parte di tale problematica diversa da quella trattata in questo intervento.

2. Analisi a priori delle potenzialità offerte dallo strumento geometrico progettato per l'attività.

In figura 1 è riportato lo strumento geometrico che è stato proposto agli alunni per lo sviluppo dell'attività. E' costituito da due semirette che hanno origine comune, ciascuna caratterizzata da una scala; una semiretta serve per rappresentare i numeri naturali e successivamente anche i numeri razionali; la seconda semiretta, chiamata ripartitrice, permette di realizzare metodi operativi di partizione di lunghezze individuate sulla prima semiretta. All'inizio questo strumento viene presentato agli alunni come uno strumento operativo per compiere ripartizioni di lunghezze, prescindendo da aspetti di misura (metodo del falegname); in figura 2 viene riportato il metodo operativo usato dagli alunni per ripartire in 6 parti una lunghezza assegnata. Osserviamo come lo strumento incorpori un concetto di partizione, controllabile sul piano percettivo attraverso la costruzione del segmento generatore della ripartizione (congiungendo l'estremo della lunghezza da ripartire con il punto sulla retta ripartitrice che indica il numero di partizioni da effettuare) e tracciando

successivamente i segmenti ad esso parallelo passanti per i punti da 1 a 5 sulla retta ripartitrice.

Una prima esplorazione relativa alle proprietà delle frazioni realizzata in classe attraverso l'uso di questo strumento riguarda la relazione d'ordine tra le frazioni con numeratore unitario. Nella figura 3 lo strumento viene utilizzato per rappresentare sulla semiretta dei numeri frazioni con numeratore unitario. Notiamo come l'attività con lo strumento consenta di esplorare e di mettere in evidenza che $1/2$ è la frazione più grande tra tutte quelle che hanno numeratore unitario e che le frazioni tendono ad addensarsi man mano che ci si avvicina allo 0. Lo strumento permette inoltre di esplorare e mettere in evidenza la proprietà che regola l'ordinamento di frazioni con numeratore unitario consentendo di giungere alla seguente formalizzazione $1/a > 1/(a+1)$. Inoltre, partendo dalla rappresentazione di una frazione con numeratore unitario (per esempio dalla rappresentazione della frazione $1/3$ di Fig. 4) e utilizzando la semiretta ripartitrice come semiretta moltiplicatrice, lo strumento consente di riportare la frazione $1/3$ sulla semiretta dei numeri, permettendo di evidenziare nuovi punti su di essa che possono essere di volta in volta facilmente interpretati attraverso un'espressione di tipo moltiplicativo quale $a \cdot 1/b$.

La seconda esplorazione consentita dallo strumento riguarda la relazione tra le frazioni con numeratore unitario e quelle con numeratore non unitario. La figura 5 mette in evidenza l'equivalenza di due metodi operativi che possono essere impiegati per rappresentare con lo strumento una stessa frazione con numeratore non unitario. Attraverso il primo metodo la frazione $3/4$ viene rappresentata riportando tre volte la frazione $1/4$. Il secondo metodo permette di rappresentare la frazione $3/4$ attraverso una partizione in 4 parti della lunghezza 3. L'uso integrato dei due metodi consente di mettere in evidenza una relazione tra le frazioni con numeratore unitario e quelle con numeratore non unitario espressa dalla seguente espressione $a/b = a \cdot 1/b$.

La terza esplorazione consentita dallo strumento riguarda lo studio delle relazioni tra le frazioni proprie e improprie rispetto all'unità. Le figure 6 e 7 consentono di comprendere che nel caso di frazione propria (es: $2/3 = 2 \cdot 1/3$) l'esplorazione può condurre a scoprire che tale relazione può essere formalizzata attraverso la seguente espressione $a/b = 1 - (b-a)/b$, mentre nel caso di frazioni improprie (es: $4/3 = 4 \cdot 1/3$) tale relazione può essere espressa attraverso la seguente espressione: $a/b = 1 + (a-b)/b$.

La quarta esplorazione riguarda le relazioni tra frazioni equivalenti. Lo strumento induce a scoprire che, rappresentata una frazione sulla retta dei numeri, esistono altri segmenti generatori (altre coppie di naturali) che conducono frazioni diverse a coincidere nello stesso punto della retta dei numeri e quindi fanno riferimento allo stesso numero (Vedi Fig. 8). A tale riguardo osserviamo che lo strumento di rappresentazione grafico proposto appare particolarmente efficace nello strutturare un'idea di numero razionale che presenta la proprietà, controllabile sul piano percettivo, di essere messo in corrispondenza con una classe di frazioni. Lo strumento mette infatti in evidenza che tali frazioni sono caratterizzate dal punto di vista geometrico dal parallelismo dei segmenti generatori e che questa proprietà fa sì che esse vengano a coincidere sulla retta dei numeri nello stesso punto, e quindi fanno riferimento allo stesso numero razionale. In altri termini lo strumento grafico

consente di dare senso ad alla seguente formalizzazione $a/b=n*a/n*b$ con n intero, dove a/b è la frazione generatrice della classe di equivalenza. Lo strumento permette inoltre altri tipi di esplorazione finalizzate per esempio alla soluzione di equazioni e disequazioni che coinvolgono frazioni o a dare senso e giustificare le modalità operative che entrano in gioco nelle operazioni con frazioni (addizioni, sottrazioni, moltiplicazione e divisioni tra frazioni). Per ragioni di spazio non verranno qui descritte.

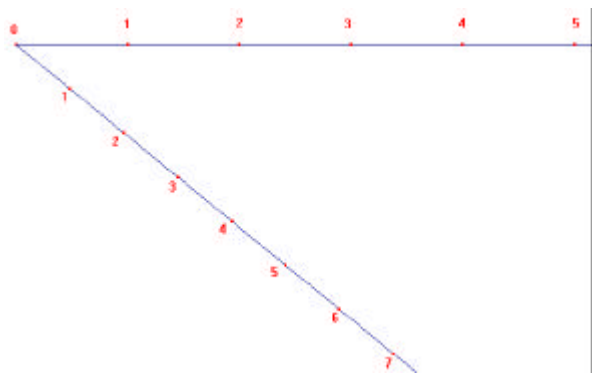


Fig. 1

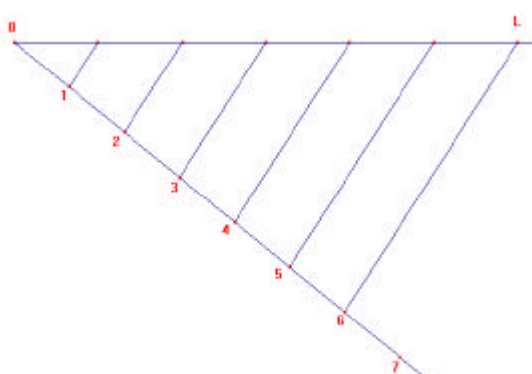


Fig 2

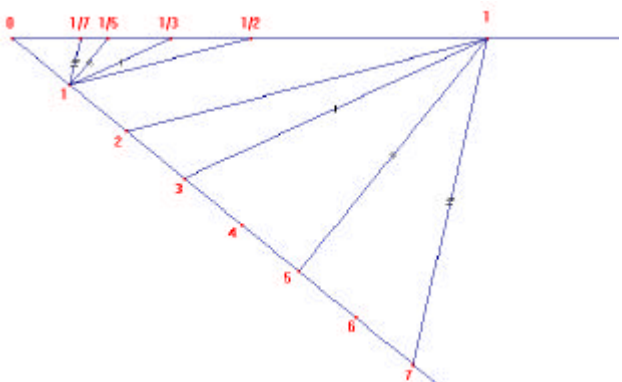


Fig. 3

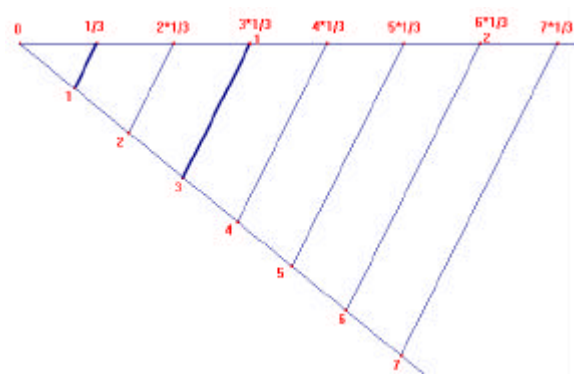


Fig. 4

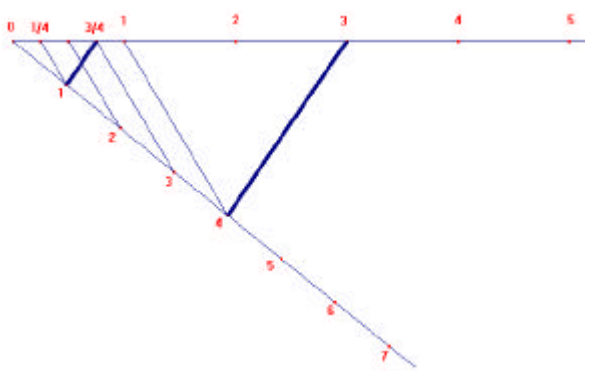


Fig. 5

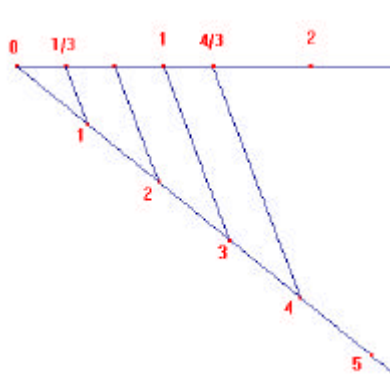


Fig. 6

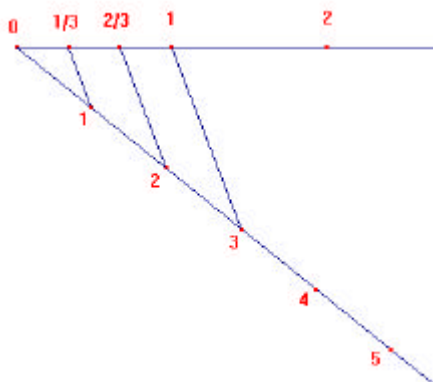


Fig. 7

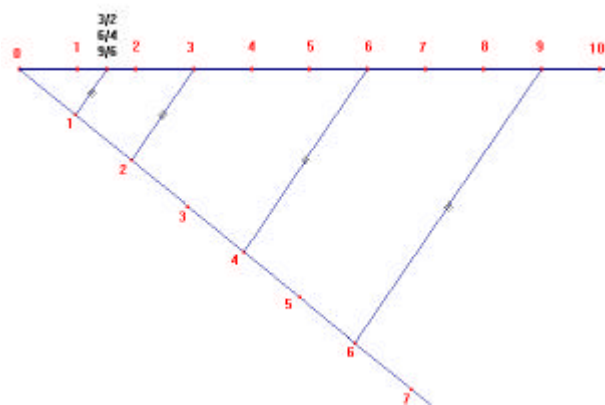


Fig. 8

3. Dall'analisi a priori al lavoro in classe

Con la nuova gestione della proposta didattica le proprietà descritte, rese evidenti attraverso l'uso dello strumento geometrico, vengono utilizzate per essere convertite prima in enunciato verbale, poi in linguaggio algebrico e infine per essere assunte come assiomi di base del quadro teorico che viene costruito dentro l'attività. All'interno di questo quadro teorico, che si va progressivamente costruendo, vengono congettrate ed enunciate nuove proprietà che si configurano come teoremi di cui gli alunni imparano gradualmente a dare una dimostrazione. Gli assiomi che nello sviluppo dell'attività vengono quindi assunti come riferimento per la costruzione del quadro teorico sono quelli evidenziati nell'analisi a priori. Illustriamo di seguito alcuni spezzoni del lavoro in classe.

3.1 Dalla rappresentazione di frazioni con numeratore 1 alle osservazioni sull'ordinamento

Nella rappresentazione di alcune frazioni unitarie sul sistema grafico, molti ragazzi autonomamente usano colori diversi per indicare i segmenti generatori e i corrispondenti segmenti paralleli passanti per l'1 sulla retta ripartitrice, differenziando così le diverse frazioni. Tutti colgono il criterio di ordinamento, ma con livelli diversi di analisi e di esplicitazione: da osservazioni semplici o articolate e ricche, ad anticipazioni e generalizzazioni, a spiegazione di significati.

- Più il denominatore è alto e più la distanza è vicina allo zero. Perciò più esso è alto e più la frazione è piccola. Le frazioni indicate sono tutte intorno allo zero.
- $1/2$ è la frazione più grande che abbiamo rappresentato E ho notato che tutte le frazioni sono ammassate alla sua sinistra e alla sua destra non c'è nessun'altra
- C'è un'enorme concentrazione di frazioni all'inizio della retta.

$1/2$, $1/3$, $1/4$ sono più staccate rispetto alle frazioni $1/20$, $1/15$, $1/10$ che sono più lontane.

Il confronto in classe sulle osservazioni individuali arricchisce gli alunni di nuove considerazioni che poi vengono reinvestite, ancora con gradi diversi di correttezza e controllo, nella successiva consegna di previsione sull'ordinamento di nuove frazioni unitarie: "... Come pensi siano posizionate sulla retta dei numeri le frazioni $1/7$, $1/11$ e $1/6$?"

- $1/11$, $1/7$, $1/6$. Io penso che disegnando con riga e squadra vengano nello stesso ordine.
- Penso che $1/11$ viene prima di $1/7$ e $1/7$ prima di $1/6$; penso anche che $1/11$ è più lontano a $1/7$ di quanto lo sia a $1/6$.
- $1/7$ è posizionato, rispetto a 1, dopo l'8 (leggi $1/8$) e prima del 6 (leggi $1/6$). $1/11$ è posizionato tra il 15 e il 10, più vicino al 15. $1/6$ è posizionato più vicino al 5 e più lontano a 9.

3.2 Verso un enunciato comune in linguaggio naturale

Sequenza dell'attività

1) Consegna individuale: "Scrivi un enunciato che esprima, in generale, il criterio di ordinamento delle frazioni che hai scoperto".

2) Scrittura di uno degli enunciati prodotti

Il criterio di ordinamento delle frazioni è questo: quelle con il denominatore + piccolo vanno dopo e sono le più grandi, mentre quelle con il denominatore + grande vanno prima e sono le più piccole

3) Proposte di cambiamento del testo per renderlo più sintetico e nuova stesura

Le frazioni più piccole sono quelle che hanno il denominatore più grande e viceversa.

4) Lettura di un altro enunciato

Se la frazione ha il denominatore alto ($1/20$) la frazione è più piccola, perché se l'intero è diviso in più parti ($1/10$) queste ultime saranno piccole; se l'intero è diviso in meno parti ($1/4$) esse saranno più grandi.

Confronto collettivo con il precedente dal quale emerge che nel secondo sono presenti spiegazioni del perché del criterio di ordinamento ed esempi.

Segue un lavoro puntuale, partecipato dalla classe, di miglioramento del testo per renderlo più simile a quello che potrebbe scrivere un matematico.

Se la frazione ha il denominatore maggiore la frazione è minore, perché se l'intero è diviso in più parti queste saranno più piccole; se l'intero è diviso in meno parti esse saranno più grandi.

3.3 Verso un enunciato comune in linguaggio algebrico

Dal confronto ed affinamento degli enunciati si passa alla loro traduzione condivisa in linguaggio algebrico con la mediazione dell'insegnante. In questa fase il ruolo di mediatore semiotico esercitato dall'insegnante è fondamentale per lo sviluppo dell'attività. Agli alunni viene richiesto di tradurre in linguaggio algebrico l'enunciato espresso in forma verbale. In un'atmosfera permeata di interesse per un argomento "da grandi" e attraverso un gioco di anticipazione, interpretazione e re-interpretazione, gestito dall'insegnante in un passaggio continuo da enunciato a espressione algebrica, da espressione algebrica a sistema grafico ed ancora ad enunciato, gli allievi giungono a formalizzare e ad interiorizzare l'enunciato costruito dalla classe. Le lettere nella costruzione del primo assioma non rappresentano solo la sostituzione di numeri particolari letti sullo strumento geometrico, ma rappresentano la successione dei numeri interi, anche quelli che non si vedono sul sistema grafico (lettera come variabile), e nello stesso tempo rappresentano la sintesi di tutti questi numeri (lettera come generalizzazione). Attraverso il confronto, la discussione, i chiarimenti sulle varie scritture proposte dagli alunni si perviene alla formalizzazione

del primo assioma. Ciò apre la strada alla possibilità di affrontare il primo teorema con la relativa dimostrazione (P1: $1/a > 1/(a+1)$; T1: se $a < b$, $1/a > 1/b$).

3.4 Dimostrazione del T1 costruita dall'insegnante interagendo con gli alunni

Si tratta della prima occasione in cui gli alunni si trovano a dover dimostrare un teorema all'interno di una teoria che ha come elemento fondamentale di riferimento il primo postulato, costruito in classe e che poggia sull'evidenza della rappresentazione geometrica. L'interpretazione in linguaggio verbale del primo teorema e la sua giustificazione mediante l'uso dello strumento geometrico costituiscono il fuoco dell'attività iniziale comune con la classe. Obiettivo dell'intera attività è far cogliere il valore della dimostrazione, ciò che la caratterizza e la differenzia da una argomentazione pertinente basata sull'uso dello strumento geometrico.

Diventa pertanto necessario dare un "copione" di dimostrazione accertandosi che ogni passaggio sia motivato e ben compreso: si procede allora ad una costruzione nella quale l'insegnante interagisce con la classe ponendo via via le domande che conducono e giustificano i vari passaggi. La maggior parte degli alunni riesce a seguire passo passo i diversi passaggi, ma mostra qualche resistenza (naturale) ad appropriarsi dell'insieme della struttura dimostrativa; ha bisogno di ritornarci su insieme all'insegnante prima e poi in modo autonomo in una serie di "tenute" e successive "cadute". In alcuni la strada di consolidamento è abbastanza breve (anche se non è detto che a distanza di tempo ritrovino incertezze nel ricostruire il percorso); in altri il processo è più lento e meno sicuro. Complessivamente "reggono" la sfida affascinati anche dall'uso di simbolismi tipici del linguaggio matematico

3.5 Uso di copioni dimostrativi

L'itinerario didattico prosegue alternando momenti di appropriazione di modelli dimostrativi e momenti di sviluppo di nuovi elementi della teoria che si va costruendo. Per il primo aspetto vengono proposte consegne che permettano agli alunni di fare eco alle voci di dimostrazione costruite interagendo con l'insegnante; per il secondo aspetto è l'insegnante che sceglie i nuovi elementi guidando alla identificazione di nuovi postulati e alla dimostrazione di nuovi teoremi.

- P1: $1/a > 1/(a+1)$
- T1: se $a < b$, $1/a > 1/b$
- T2: $1/a > 1/(a^n)$ con $n > 1$
- P2: $a/b = a \cdot 1/b$
- T3: $1/(a^n) > 1/(a^m)$ se $n < m$
- T4: $a/b < (a+1)/b$
- T5: $a/b > a/(b+1)$
-

Per consentire a tutti gli alunni di entrare nel gioco dimostrativo, parallelamente vengono assegnate consegne sia in classe che a casa che impegnano gli alunni ad applicare procedure e proprietà in situazioni specifiche. Esempi:

Utilizzando il teorema 2 dimostra che $1/12 < 1/3$

Esempio di soluzione

T2: $1/a > 1/(n \cdot a)$ con $n > 1$

Devo dimostrare che $1/12 < 1/3$

$$1/12 = 1/(3 \cdot 4)$$

$$1/3 > 1/(3 \cdot 4) \text{ con } n = 4 > 1$$

Utilizzando il teorema 2 dimostra che $1/(12 \cdot 7) < 1/6$

Esempio di soluzione

T2: $1/a > 1/(n \cdot a)$ con $n > 1$

Devo dimostrare che $1/(12 \cdot 7) < 1/6$

$$1/(12 \cdot 7) = 1/(6 \cdot 2 \cdot 7) = 1/(6 \cdot 14)$$

$$1/6 > 1/(6 \cdot 14) \text{ con } n = 14 > 1$$

Queste soluzioni sono esempi di quelle prodotte dagli alunni all'interno di un processo necessariamente lungo e non privo di difficoltà in cui l'insegnante svolge un ruolo cruciale di assistenza alla *performance* degli alunni ("*prova a costruire la catena delle diseguaglianze a partire da ... fino ad arrivare a Allora*", "*vai a riguardare cosa dice il T1: riconosci in esso la situazione del tuo caso particolare?*") e di gestore dell'attività di confronto delle produzioni degli alunni. In alcuni casi l'assistenza ha richiesto di andare oltre i semplici suggerimenti; per esempio alcune volte è stato necessario affiancare la scrittura dell'insegnante dei passaggi iniziali, altre volte si è provato ad andare avanti insieme sfruttando spezzoni adeguati elaborati dai compagni e lavorando in modo dialogato e interattivo.

Via via il livello di orientamento è aumentato e gli alunni hanno dimostrato di "stare al gioco": sfogliano il quaderno, provano, chiedono, si confrontano

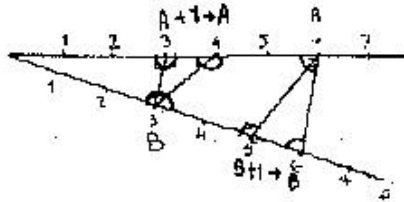
3.6 Un esempio di attività in cui si integrano tutti gli "strumenti" introdotti



Riportiamo un esempio tratto dalla sperimentazione effettuata nel quale emerge come i diversi strumenti disponibili per l'attività possano venire utilizzati in modo integrato tra loro e come ciascuno di essi possa contribuire a costruire specifici significati nell'ambito dell'attività.

L'insegnante chiede agli alunni di utilizzare lo strumento geometrico per esplorare cosa succede se il numeratore o il denominatore di una generica frazione a/b viene incrementato di una unità. Il seguente protocollo evidenzia come uno studente abbia utilizzato lo strumento geometrico per costruire una congettura in riferimento alla richiesta dell'insegnante. Alla fase di esplorazione individuale con lo strumento geometrico segue il confronto delle congetture realizzate nella classe. In questa fase ciascun alunno, illustra il modo in cui ha utilizzato lo strumento e la congettura a cui è pervenuto. Il confronto porta alla costruzione in classe di un enunciato condiviso della congettura che viene convertita in linguaggio algebrico ed espressa come teorema di cui si vuole trovare la dimostrazione : *dimostrare che $a/b < (a+1)/b$; $a/b > a/(b+1)$*

La dimostrazione viene realizzata nel registro algebrico, utilizzando gli assiomi e i teoremi precedentemente dimostrati. Per la realizzazione della dimostrazione, gli alunni lavorano prima individualmente potendo contare sull'assistenza fornita a ciascuno di loro dall'insegnante che passa tra i banchi.

Quando l'insegnante ritiene che tutti gli alunni abbiano potuto esprimere le loro potenzialità sul piano individuale, passa al confronto collettivo delle produzioni realizzate, avendo cura di coinvolgere nell'interazione anche gli alunni che hanno presentato maggiori difficoltà nella costruzione della dimostrazione.



- 4) $\frac{A+1}{B}$:  L'ANGOLO DIVENTA PIÙ OTTUSO e VICEVERSA (INERTE ANCHE)
LA LINEA DIVENTA PIÙ LUNGA E VICEVERSA (INERTE)
LA FRAZIONE È GRANDE
- 5) $\frac{A}{B+1}$:  L'ANGOLO DIVENTA PIÙ ACUTO
LA LINEA È CORTE E LA FRAZIONE È PICCOLA

L'esempio, tratto dalla sperimentazione effettuata, mette in luce come i diversi strumenti disponibili per l'attività possano venire utilizzati in modo integrato tra loro e come ciascuno di essi possa contribuire a costruire specifici significati nell'ambito del lavoro. Osserviamo che l'uso dei postulati e delle proprietà dell'uguaglianza (transitiva) e delle operazioni (distributiva e commutativa) appositamente introdotte nell'ambito dell'attività di dimostrazione, evidenziano in un contesto significativo e motivante, la funzione di trasformazione del linguaggio algebrico: si passa da una espressione ad un'altra espressione attraverso l'applicazione di proprietà ed ogni passaggio ha un significato, in quanto giustificato da un assioma o da una proprietà nell'ambito della teoria assunta come riferimento. Le competenze sviluppate in questo ambito possono essere reinvestite, affrontando problematiche specifiche dell'approccio all'algebra, potendo stipulare un contratto didattico profondamente diverso da quello normalmente utilizzato nelle classi. L'attività didattica sviluppata permette, infatti, di presentare la manipolazione algebrica non come un'attività di applicazione di regole ma come un'attività di dimostrazione formale dell'equivalenza di espressioni algebriche sulla base di applicazioni di assiomi e di teoremi della teoria assunta come riferimento (Cerulli, Mariotti, 2000).

Bibliografia

- Molinari, M., Chiappini G., Corradi P., Sibilla A., 1999, 'Osservazione dei processi di apprendimento: il caso dei numeri razionali', *Atti del III Convegno Internuclei Scuola dell'Obbligo*.
- Cerulli M. & Mariotti, M.A.: 2000, 'A symbolic manipulator to introduce pupils to algebra theory. *Proceedings of "Learning Algebra with the Computer: A Transdisciplinary Workshop"*. ITS'2000, Montreal.